Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional[1]

Hélia Pinto; C. Miguel Ribeiro

Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria; Centro de Investigação sobre os Espaços e as Organizações, Universidade do Algarve

Resumo: Nos últimos anos o conhecimento do professor tem vindo a ser reconhecido como um dos aspetos nucleares no, e para o, desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Atendendo a essa centralidade, a formação deverá focar-se onde é, efetivamente, necessária, de modo a potenciar um incremento do conhecimento dos alunos, pelo conhecimento (e práticas) dos professores. Sendo os números racionais um dos tópicos problemáticos para os alunos, é fundamental identificar quais as situações matematicamente (mais) críticas para os professores de modo que, pela formação facultada, possam deixar de o ser. Neste artigo, tendo por foco o conhecimento matemático do professor e as suas especificidades, discutimos alguns aspetos desse conhecimento de futuros professores sobre números racionais, em concreto o sentido de número racional, identificando as suas componentes mais problemáticas e equacionando alguns dos porquês em que se sustentam. Terminamos com algumas considerações sobre implicações para a formação de professores e responsabilidade dos seus formadores.

Palavras-chave: Conhecimento de futuros professores; números racionais; situações matematicamente críticas; formação de professores.

Pinto, H. & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 80-98.

Contacto: Hélia Pinto, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, Portugal / helia.pinto@ipleiria.pt

[1] Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Forma parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), financiado pelo Ministério de Ciência e Inovação de Espanha.

Abstract: In recent years, teachers' knowledge has come to be recognized as one of the core aspects in and for the development of students' mathematical knowledge. This being the case, training should focus on where it is really required, in such a way as to increase the knowledge of students through the knowledge and practice of teachers. Rational numbers are notoriously difficult for students and it is essential to identify mathematically critical situations for teachers, so that, through training, they cease to be problematic. In this article, with its focus on specific aspects of teachers' mathematical knowledge, we shall discuss prospective teacher's knowledge with regard to rational numbers, specifically rational number sense, identifying its components and considering some of the reasons for the problems associated with it. We shall finish with a few considerations of the implications for teacher education and the responsibility of the trainers.

Key words: prospective teachers' knowledge, rational numbers, mathematically critical situations; teacher education.

Résumé: Ces dernières années, le savoir de l'enseignant a été reconnu comme l'un des aspects fondamentaux, dans et pour le développement des connaissances mathématiques des élèves. Face à cette centralité, la formation devra se concentrer là où cela est effectivement nécessaire, afin de favoriser un accroissement de la connaissance des élèves, sur la connaissance (et pratique) des enseignants. Puisque les nombres rationnels sont un des sujets les plus problématiques pour les étudiants, il est essentiel d'identifier quelles sont les situations mathématiquement (les plus) critiques pour les enseignants afin que, grâce à la formation dispensée, elles puissent cesser de l'être. Dans cet article, centré sur les connaissances mathématiques des enseignants et leurs spécificités, nous discutons certains aspects de cette connaissance des futurs enseignants sur les nombres rationnels, plus précisément le sens du nombre rationnel, identifiant les éléments les plus problématiques et réfléchissant sur les raisons qui les justifient. Nous terminons avec quelques réflexions sur les implications pour la formation des enseignants et la responsabilité de leurs formateurs.

Mots-clés: Savoir des futurs enseignants; nombres rationnels; situations mathématiquement critiques, formation des enseignants.

MOTIVAÇÃO E PROBLEMÁTICA

A formação de professores dos Primeiros Anos[2] tem sido foco de diversas alterações ao longo dos últimos anos. Algumas dessas alterações encontram-se associadas, por um lado, a orientações ministeriais, que possuem, teoricamente, impacto direto nessa formação e, por outro lado, à existência de um Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB), que teve em consideração alguns dos resultados mais recentes em termos de investigação em Educação Matemática. Assim, se a implementação do Processo de Bolonha permitiu, em termos teóricos, tornar mais homogéneas as formações oferecidas por cada Instituição de Ensino Superior (IES), tendo sido

[2] Professores do Pré-Escolar, 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico. Assumimos que professor de Matemática é todo aquele ao qual cumpre abordar temas especificamente relacionados com esta área, daí que incluamos os professores do Pré-Escolar (comummente denominados de Educadores de Infância), os do 1.º Ciclo do Ensino Básico e todos os outros que tenham obtido uma licenciatura em Matemática (para o ensino, ou equivalente).

definido pelo Ministério responsável o número de créditos de cada uma das áreas de formação,[3] a existência de um PMEB, que incorpora, pela primeira vez, num mesmo documento, os nove primeiros anos de escolaridade (Ponte, et al., 2007), pretendia tornar mais sequencial e integrada a atuação docente, alertando também os professores para essa sequencialidade.

Conjuntamente, estas alterações parecem considerar, ainda que nem sempre de forma explícita, uma atenção particular no conhecimento do professor e nos resultados e dificuldades dos alunos – tendo também em consideração os resultados dos alunos portugueses nos exames e testes internacionais (e.g., GAVE, 2010; Krainer, Hsieh, Peck & Tatto, 2012; Tatto, Senk, Rowley & Peck, 2011). Se, por um lado, consideram a necessidade de incrementar a formação matemática dos futuros professores[4], reconhecendo também a existência de algumas debilidades nesse conhecimento, por outro, incluem no que é suposto os alunos dos primeiros anos saberem sobre alguns tópicos, e formas de os encarar, o que a literatura de investigação refere como sendo de difícil entendimento para os alunos. Por exemplo, no contexto deste artigo, relativo aos números racionais, uma das áreas que a investigação identifica como problemática para os alunos e onde, portanto, estes revelam grandes dificuldades (e.g., Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Kieren, 1976; Kribs-Zaleta, 2006; Monteiro & Pinto, 2005; Streefland, 1991).

Considerando que o professor (e o seu conhecimento) assume um papel de destaque na e para a aprendizagem dos alunos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004), estas dificuldades dos alunos podem ser também percecionadas de forma imbrincada com o conhecimento do professor – tanto no que se refere ao conhecimento do conteúdo que possui, ou assume deter, como nas consequências das possíveis abordagens efetuadas. Por conseguinte, em situações em que o professor possa sentir dificuldades (reconhecidamente ou mesmo inconscientemente), poderá optar por desenvolver uma atividade didaticamente emocionante, mas matematicamente pouco desafiadora e exigente (Ribeiro & Carrillo, 2011), o que limitará, também, necessariamente, o próprio entendimento dos alunos sobre o tópico. Este conhecimento matemático do professor é entendido, aqui, segundo a concetualização do *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*, atendendo às suas especificidades e, portanto, como "*o conhecimento matemático utilizado para desenvolver as tarefas de ensinar matemática*" (Hill, Rowan & Ball, 2005, p. 373).

A identificação destas dificuldades dos alunos no tópico dos números racionais, bem como os resultados de alguns estudos que ilustram algumas das dificuldades dos futuros professores relativamente ao papel da unidade (e.g., Caseiro & Ribeiro, 2012; Ribeiro & Jakobsen, 2012), conjugados com o desejo de contribuir, de forma ativa e participativa para melhorar o conhecimento, a formação e a prática do professor (atual e futuro), levaram-nos a iniciar um projeto de investigação e formação, focado no conhecimento do futuro professor dos primeiros anos. Deste modo, pretendemos poder contribuir para um incremento do conhecimento

[3] Em algumas IES era possível obter a licenciatura de educador/professor do primeiro ciclo e/ou do 2.º ciclo com um máximo de 25 horas de formação em matemática/didática, sendo o foco em aspetos da área da psicologia, revelando-se assumir que os futuros professores já conheciam os temas que iam ensinar e, portanto, o facto de terem sido alunos dessas etapas educativas (pré-escolar/1.º e 2.º Ciclos) era suficiente para os ensinar.

[4] Consideramos aqui esta formação matemática do professor de modo especificamente associado às tarefas de ensinar e, portanto, tendo em consideração uma especificidade muito particular que é mais ampla do que somente saber responder às questões colocadas – saber para si.

matemático do professor especificamente relacionado com a sua atuação docente e as tarefas de ensinar.

Neste sentido, e por considerarmos fundamental que a formação se foque onde é, efetivamente, necessária, consideramos essencial identificar as situações/áreas que se configuram como matematicamente mais críticas, de modo a discutir e refletir sobre os (possíveis) motivos que as sustentam, para que possamos contribuir para a sua melhoria – considerando que este conhecimento matemático para ensinar pode, efetivamente, ser ensinado (Hill & Ball, 2004). Assim, no âmbito deste projeto, focamo-nos, em particular, no conhecimento revelado por futuros professores dos primeiros anos[5] relativamente ao conceito de número racional e operações com números racionais, nomeadamente o papel da unidade de referência e as implicações de uma sua alteração; os diferentes significados das frações e os problemas que os possam contextualizar; os motivos matemáticos que sustentam e justificam determinada forma de dividir números racionais na sua representação em fração. Este foco no conhecimento dos futuros professores pretende contribuir para a identificação das situações mais problemáticas (mas considerando-as apenas como ponto de partida e nunca como ponto de chegada), de modo a podermos, posteriormente, concetualizar formas (tarefas e abordagens) que permitam um incremento de um tal conhecimento – em todos os seus subdomínios.

Com este artigo pretendemos promover uma discussão e reflexão sobre aspetos concretos do conhecimento dos futuros professores no âmbito dos números racionais e, de forma mais ampla, problematizar as implicações desse conhecimento (ou falta de evidências) na formação que facultamos, questionando, também, o nosso papel como formadores e responsabilidades associadas. Para tal, centramo-nos nas situações matematicamente críticas (encaradas como uma oportunidade de aprender (Hiebert & Grouws, 2007)), relativamente ao conceito de número racional. De salientar que a discussão final não tem por intuito (primordial) acentuar as dificuldades dos futuros professores, já que estas são vistas como oportunidades de aprendizagem (tanto para os estudantes como para os formadores). Pretende, também, problematizar a *nossa*[6] atuação enquanto formadores, no sentido de possibilitar, de alguma forma, dar o passo em frente e passar para um nível seguinte – em que os futuros professores detêm, efetivamente, um conhecimento matemático especificamente associado à atuação docente e que esse conhecimento não se limite a um "embelezamento" através do recurso a tarefas "giras" de um conhecimento do nível dos alunos, que poderão vir a ensinar. Nesse sentido, discutiremos, ainda que sumariamente, a natureza das tarefas para a e na formação de professores, que tenham em consideração esse facto.

SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL E CONHECIMENTO DO PROFESSOR PARA ENSINAR

Os números racionais são considerados por vários investigadores (e.g. Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lamon, 2007) como um dos tópicos matemáticos mais complexos e importantes do

[5] Em diferentes fases da sua formação – tanto no início como no fim da licenciatura, mas também durante o mestrado, quer do pré-escolar quer do 1.º e 2.º Ciclos.

[6] Aqui, *nossa* corresponde em primeiro lugar à dos autores, porém deverá ser entendida, também, como uma menção a todos os responsáveis pela formação de professores.

currículo do ensino básico, já que promove o desenvolvimento de estruturas cognitivas cruciais à aprendizagem matemática futura. Assim, o insucesso dos alunos na aprendizagem de números racionais é um sério obstáculo ao desenvolvimento do seu conhecimento matemático. Behr et al. (1983) referem que as dificuldades com que os alunos se deparam na aprendizagem de números racionais podem advir: (i) da multiplicidade de significados atribuídos às frações; (ii) da conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo frações; e (iii) da utilização precoce de regras e algoritmos no estudo de números racionais. Também Vanhille e Baroody (2002) salientam como causas das dificuldades dos alunos com os números racionais e as operações com frações: (i) a falta de vivência de experiências concretas, necessárias à construção da compreensão conceptual de frações, ou a falta de conexão entre estas experiências e os conceitos abstratos; e (ii) um fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, indispensável à compreensão das frações, que, segundo os autores, se deve a um inadequado desenvolvimento das estruturas multiplicativas. Com efeito, a compreensão de muitos dos conceitos relativos aos números racionais está baseada em relações entre números inteiros de natureza multiplicativa, nomeadamente a multiplicação e divisão de números inteiros e suas relações (Flores, 2002; Vergnaud, 1983, 1988).

Por conseguinte, os alunos apresentam dificuldades com os números racionais, suas representações e significados das operações, e muitos professores não parecem conscientes dos obstáculos com que eles se deparam, ao progredirem na conceptualização dos referidos números (Lamon 2007). Porém, muitos adultos, incluindo professores (Harel, Behr, Post & Lesh, 1994; Ma, 1999; Post, Harel, Behr & Lesh, 1988) e os que se encontram na formação inicial de professores (Graeber, Tirosh & Glover, 1989; Harel, et al., 1994; Simon & Blume, 1994), também parecem debater-se com as mesmas dificuldades dos alunos, mantendo as mesmas ideias primitivas e conceitos errados. Segundo Lamon (2007), as dificuldades evidenciadas pelos adultos podem advir da falta de tratamento adequado do campo conceptual multiplicativo no currículo de matemática, e da vivência das mesmas experiências escolares que as dos atuais alunos – correspondendo esta perceção a algo para que pretendemos contribuir no sentido da sua alteração.

Huinker (2002) e Sharp, Garofalo e Adams (2002) referem que as abordagens tradicionais de ensino dos números racionais e operações com estes números passam, essencialmente, pela memorização e pela prática rotineira de exercícios. Salientam que introduzir algoritmos antes da compreensão conceptual, ou sem relacionar o algoritmo com o conhecimento conceptual, promove a falta de conexão entre conceitos e procedimentos e entre números racionais e realidade dos alunos. No entanto, consideram que, se os alunos desenvolverem uma base de conhecimento conceptual para o sentido de número racional e para o sentido de operação, desenvolvem estratégias flexíveis de cálculo e de resolução de problemas que os levam a uma aprendizagem significativa dos referidos números e respetivas operações. Porém, este desenvolvimento apenas será possível/exequível se os professores possuírem, eles próprios, sentido de número racional, bem como um conhecimento que lhes permita entender, efetivamente, o sentido de número racional e das operações que os envolvem. Assim, é essencial que se desenvolva o sentido de número racional, que de acordo com Pinto (2011) requer o desenvolvimento integrado de cinco componentes e respetivas capacidades (Quadro 1) – cumprindo ao professor um conhecimento que lhe permita, também, uma sua expansão.

Quadro 1: Modelo para caraterizar o sentido de número racional (Pinto, 2011, pp. 112-113)

SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto	→ Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto	→ Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua) → Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
Familiaridade com diferentes representações de número racional	→ Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto) → Reconhecer frações equivalentes
Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais	→ Representar números racionais na reta numérica → Comparar e ordenar números racionais → Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais
Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais	→ Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais. → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

No que se refere à componente da familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto, a investigação mostra que os alunos adquirem uma compreensão significativa do conceito de número racional, quando lhes é proporcionada a exploração de tarefas que contemplam a maioria dos significados das frações (e.g., Kieren, 1976; Lamon, 2007). Assim, no sentido de potenciar o desenvolvimento dessa compreensão, será essencial que os alunos não sejam confrontados somente com alguns desses significados, o que os deixaria(á) com uma noção empobrecida de número racional.

A investigação mostra também a importância da conceção da unidade de referência na compreensão das frações, dado que uma fração tem sempre subjacente uma unidade (Lamon, 2007; Monteiro & Pinto, 2005, 2007). Por conseguinte, é essencial uma discussão (com os alunos) sobre a importância da unidade, de modo a que fique bem claro e compreendido que para podermos definir uma determinada fração temos sempre de ter em consideração o todo a que essa fração faz referência – aqui o todo deverá ser tanto contínuo como discreto.

Também o conhecimento de que os números podem ser representados de diferentes formas, aliado ao reconhecimento de que algumas representações são mais úteis do que outras em certas situações de resolução de problemas, é reconhecido como essencial para o desenvolvimento do sentido de número (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Dados da investigação referem, ainda, a importância do desenvolvimento da ordenação e da regularidade do sistema de numeração, já que este desenvolvimento permite que os alunos usem estes conhecimentos noutras situações, nomeadamente na identificação de números entre 2/5 e 3/5 (McIntosh et al., 1992) e na compreensão da densidade deste conjunto, que facilita a compreensão dos números racionais (Behr et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2007).

Por último, o desenvolvimento da componente relativa aos símbolos e linguagem matemática formal significativos requer que os alunos comecem por relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais e, gradualmente, passem a relacioná-los com linguagem matemática formal, para que possam lidar com símbolos e linguagem matemática formal de modo significativo (Slavit, 1999).

A promoção do desenvolvimento de um completo conhecimento de número racional, e assumindo o professor um papel de destaque na e para a aprendizagem dos alunos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004), apenas será possível se o professor for, ele mesmo, detentor de um conhecimento sobre o tema que lhe permita, posteriormente, preparar e implementar tarefas que sejam matematicamente desafiadoras, tal como as consideram Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000), passíveis dessa promoção. Esse conhecimento do professor tem vindo a ser foco de atenção continuada nos últimos anos, e pode ser encarado sob distintas perspetivas tendo, na sua maioria, como génese, os trabalhos de Shulman e colegas (e.g. Shulman, 1986, 1987; Wilson, Shulman & Richert, 1987). Este foco de atenção encontra-se relacionado com a distinção efetuada por Shulman (1986) entre conhecimento do conteúdo (SMK) e conhecimento didático do conteúdo (PCK). A partir desses trabalhos e distinção entre estes domínios do conhecimento, vários têm sido os avanços no entendimento do conteúdo do conhecimento do professor, sendo muito desse avanço associado ao processo de concetualização de formas de encarar e representar o conteúdo desse conhecimento. Uma dessas concetualizações refere-se ao *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) – que, numa tentativa de sintetizar e simplificar (mas não simplista), seguindo os trabalhos de Shulman, considera cada um dos dois domínios (SMK e PCK) subdivididos em três subdomínios (Figura 1).

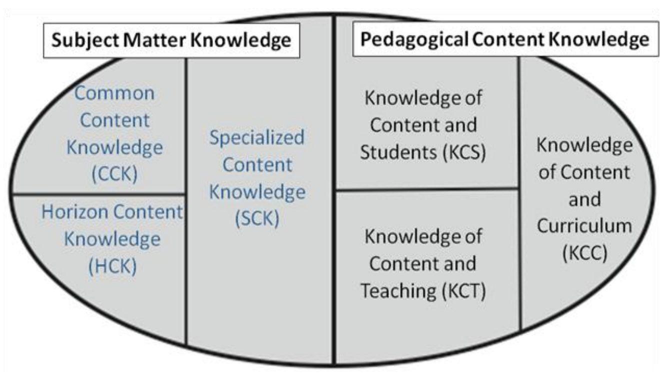

Figura 1: Domínios do MKT (Ball et al., 2008, p. 403)

Aqui, pelo contexto específico deste trabalho, e objetivos associados (Cf. Contexto e método), iremos focar-nos apenas no domínio do conhecimento do conteúdo (SMK), deixando à margem o denominado *Horizon Content Knowledge*, dado este ser ainda um dos subdomínios do conhecimento do professor menos estudados e, portanto, a requerer muita discussão tanto no que se refere a abordagens metodológicas como teóricas (e.g., Jakobsen, Thames & Ribeiro, 2013; Potari et al., 2013).[7]

O *Common Content Knowledge* (CCK) corresponde a um conhecimento que é utilizado pelo professor no desenvolvimento das tarefas de ensinar, mas também, comummente, utilizado noutros contextos que não os de ensino. Pode ser considerado como o conhecimento que permite a qualquer indivíduo conhecer o tópico para si mesmo, ou seja, saber fazer na ótica do utilizador (obter uma resposta correta a uma questão matemática – saber determinar o resultado de uma determinada operação). Obviamente que ao professor cumpre um conhecimento que lhe permita saber fazer. Porém, de modo a permitir aos seus alunos um efetivo e completo conhecimento de cada um dos tópicos e das formas como estes se podem relacionar, para além desse conhecimento que lhe permite obter a resposta correta às situações que propõe, ao professor cumpre também um conhecimento relativo, entre outros, aos motivos matemáticos que sustentam os processos/aproximações efetuadas na determinação dos resultados. Este conhecimento complementar ao saber fazer corresponde ao denominado *Specialized Content Knowledge* (SCK).

Por conseguinte, no âmbito dos números racionais, compete ao professor, entre outros, um conhecimento que lhe permita preparar e implementar tarefas para abordar e explorar, de forma conjunta, os diferentes constructos associados ao conceito de número racional, sendo para tal fundamental que tenha em consideração a multiplicidade de possíveis formas de representação associadas (e.g., diferenças entre significados distintos; diferentes tipos de unidades a considerar – contínuas ou discretas; formas de comparar quantidades de diferentes ordens de grandeza). Assim, ao professor, para além de obviamente necessitar de saber como obter uma resposta correta a cada uma das situações que coloca, quer seja aplicando um determinado procedimento, quer recorrendo a outras representações mais pictóricas (considerado um conhecimento matemático comum a todos aqueles com algum tipo de formação matemática – e.g., engenheiros, enfermeiros), cumprirá também um conhecimento matemático complementar, que lhe permita entender os porquês matemáticos associados a essas respostas corretas ou o que sustenta as incorretas – podendo ambas envolver raciocínios bastante díspares dos seus, o que torna um seu entendimento algo bastante mais complexo (e.g., Ribeiro, Mellone & Jakobsen, 2013b). Esse conhecimento matemático, especificamente associado à atuação docente (SCK), inclui também um conhecimento que permite navegar entre diferentes formas de representação e saber que a linguagem que utiliza tem um impacto crucial na forma como os conteúdos são encarados – tanto no que espera que os alunos possam aprender, como nas evidências do que ele próprio sabe ou assume saber (Ribeiro & Carrillo, 2011).

Com o intuito de possibilitar aos alunos uma efetiva compreensão do conceito de número racional é fundamental que os professores sejam, também eles, conhecedores dos diferentes aspetos do conteúdo que pretendem abordar, das suas possíveis diferentes formas de representação e de formas de os explorar e abordar em contexto. Assim, ao professor cumprirá entre outros, um conhecimento que consideramos elementar e que lhe permita responder às questões do nível dos alunos (podendo ser considerado CCK), conhecimento esse que não é, de todo, suficiente, quando se pretende que os alunos possam atribuir sentido e significado ao que fazem e porque o fazem.

[7] Para mais informações sobre o HCK consultar, por exemplo, Jakobsen et al., (2013) ou Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney (2012).

Neste contexto cumpre-lhe então um conhecimento que lhe permita obter uma resposta correta a questões como: que parte de uma determinada figura está pintada; quanto é 3/5 de 30; se 1/3 de uma unidade corresponde a 4, a que quantidade corresponde a unidade; a que quantidade corresponde $1\frac{2}{5}$; numa mesma unidade, que relação existe entre 2/3 e 5/6; quantos números existem entre dois racionais. Porém, cumprir-lhe-á, também, um conhecimento associado relativo a saber que quando nos referimos a parte de uma figura temos de ter em consideração (a menos que se explicite outra intenção) que essas partes podem ser equivalentes, semelhantes com razão 1, isoperimétricas ou mesmo pertencentes a um conjunto mais amplo (e.g., triângulos, retângulos), o que poderá corresponder a respostas corretas distintas; que 3/5 de 30 corresponde a *retirar* 3/5 de 30, mas que este *retirar* não corresponde a efetuar essa subtração de forma algébrica (direta) e que existem várias formas equivalentes de o efetuar; que a reconstrução da unidade tem de ter em consideração o valor de cada uma das partes iguais em que se encontra dividida; que um numeral misto não é equivalente a multiplicar o número de unidades pela fração e os motivos subjacentes ao facto de, para comparar duas quantidades (em fração), ser necessário que uma mesma unidade de referência se encontre dividida em partes comparáveis.

Estes conhecimentos matemáticos, especificamente associados à atuação docente – tanto no que concerne ao CCK como ao SCK – apenas poderão ser desenvolvidos (ensinados) na formação (inicial e/ou contínua) se for dedicada especial atenção quer às abordagens, quer às explorações e seus focos. Porém, deve ter sempre como objetivo máximo desenvolver o conhecimento dos formandos de modo integrado, não se centrando essencialmente em aspetos mais relacionados com a componente didática da atuação docente e tendo por objetivo explícito desenvolver, de forma imbrincada, conhecimentos associados aos diferentes subdomínios do conhecimento do professor, considerando as especificidades deste.

CONTEXTO E MÉTODO

Com o intuito de desenvolver uma sequência de tarefas para a formação de professores, associada ao desenvolvimento do conhecimento do professor dos Primeiros Anos, iniciámos um projeto de investigação envolvendo várias instituições de formação de professores. Este artigo relaciona-se com um dos objetivos definidos nesse projeto mais amplo e constitui uma primeira aproximação, em concreto, ao conhecimento de futuros professores relativo ao conceito de número racional. Para melhorar a formação, é essencial um foco nas situações mais problemáticas (Ribeiro & Carrillo, 2011), bem como a elaboração de tarefas para a formação com base na discussão de situações similares às que esperamos que os professores possam facultar aos seus alunos, envolvendo também exemplos de distintas respostas possíveis que se sustentam em diferentes raciocínios e argumentações (Ribeiro, Mellone & Jakobsen, 2013a). Com este fim, um primeiro passo corresponde, portanto, à identificação das situações que se configurem matematicamente críticas no conhecimento dos (futuros) professores.

Este estudo combina uma metodologia quantitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2000) e, nesta primeira fase – sobre a qual nos debruçamos aqui – foram aplicadas algumas tarefas a futuros professores em duas Instituições de Ensino Superior (IES) que formam professores dos Primeiros Anos. Com as diferentes tarefas apresentadas aos futuros professores, pretendemos aceder ao seu conhecimento relativo ao conceito de número racional, nomeadamente se detêm um conhecimento que lhes permita: (i) reconhecer diferentes significados das frações (aqui apenas nos debruçaremos sobre a parte-todo, quociente e operador); (ii) identificar e reconstruir a unidade de referência; (iii) reconhecer frações equivalentes e relacionar diferentes representações; (iv) comparar e ordenar números racionais, reconhecendo a sua densidade; e (v) relacionar símbolos com ações e conhecimentos informais, bem como com linguagem matemática formal (e adequada) de forma significativa. Estas tarefas têm por base questões que supostamente alunos do 4.º ano de escolaridade deveriam estar em condições de resolver – de acordo com o que é referido no PMEB (Ponte et al., 2007), tendo sido respondidas individualmente e, posteriormente, discutidas em grande grupo, tendo por foco o desenvolvimento do MKT dos futuros professores – nas suas mais diversas dimensões.

Estas discussões em grande grupo foram gravadas em áudio e vídeo numa das IES de modo a complementar também as informações recolhidas nas respostas às tarefas propostas e a possibilitar, posteriormente, a sua futura visualização e discussão com os estudantes.

Aqui focamo-nos, essencialmente, nas respostas escritas dos futuros professores às tarefas. A análise quantitativa foi apenas exploratória e teve como intuito identificar as questões mais problemáticas, possibilitando uma visão global dos aspetos matematicamente críticos e sobre os quais teremos de nos focar nas fases seguintes do trabalho. Estas situações matematicamente críticas, e dificuldades dos futuros professores, são encaradas como uma oportunidade para aprendermos e não como um fim em si. Responderam às tarefas 27 estudantes (12 que frequentam um mestrado para professores do 1.º e 2.º Ciclo e 14 estudantes que frequentam o 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica). Esta diversidade de contextos é encarada como uma oportunidade de obter uma mais ampla compreensão dos aspetos em análise, sendo essa diversidade vista como mais um elemento de riqueza para um maior entendimento sobre os possíveis motivos que sustentam as dificuldades identificadas e, portanto, mais uma fonte de informação para equacionar formas de contribuir para incrementar o MKT dos futuros professores, melhorando a formação facultada.

Partindo da análise quantitativa e da identificação das questões mais problemáticas, foi efetuada uma categorização atendendo à (in)correção das respostas, mas também ao tipo de (in)correção (possíveis raciocínios e justificações apresentadas), bem como às representações utilizadas e às relações (ou ausência destas) entre essas diferentes representações – e.g., algébricas, pictóricas.

Neste artigo discutimos essencialmente várias das respostas incorretas e os possíveis motivos matemáticos em que estas se poderão sustentar, de modo a podermos obter uma maior compreensão e um entendimento mais alargado dos fatores que poderão estar na base dessas dificuldades. Com esse propósito apresentam-se e discutem-se os resultados recorrendo a exemplos das respostas dos estudantes a várias das questões efetuadas, focando os significados de fração, o papel da unidade de referência, diferentes representações e a comparação e ordenação de números racionais, bem como a sua densidade.

ALGUNS RESULTADOS E SUA DISCUSSÃO

Relativamente aos diferentes significados das frações, a maioria dos estudantes revelou pouca familiaridade, mesmo com o significado que admitiram ter sido mais explorado durante o seu percurso escolar, ou seja, a fração como parte-todo. Assim, por exemplo, perante tarefas que envolvem este significado, os estudantes nem sempre reconheceram a necessidade da unidade estar dividida em partes iguais, o que talvez esteja associado ao facto de frequentemente, nós, professores, não dedicarmos a devida atenção à linguagem que utilizamos (e.g., Ribeiro, 2009;

Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2012) e apenas dizermos "dividir em 3 partes", assumindo implicitamente que cada uma dessas partes tem de ser igual. Porém, mesmo os estudantes que evidenciam este conhecimento apresentam dificuldades. Por exemplo, quando solicitados a identificarem as imagens que têm 2/3 pintados, 36% dos estudantes identificam a imagem E (Figura 2), que está dividida em 3 partes, mas não em partes iguais – apesar de serem todos triângulos (e, portanto, embora irrelevante para a questão em si, iguais em forma), não são iguais nem em área (equivalentes), nem em perímetro (isoperimétricas).

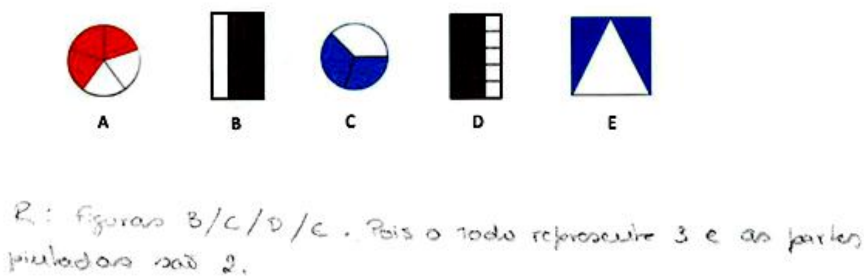

Figura 2: Fração como parte-todo

Perante questões que envolvem a fração como quociente, por exemplo "*Se fossem 10 amigas e tivessem pedido 6 tartes para partilharem igualmente que parte de tarte teria comido cada uma*?", apenas 21% dos estudantes respondeu corretamente (Figura 3).

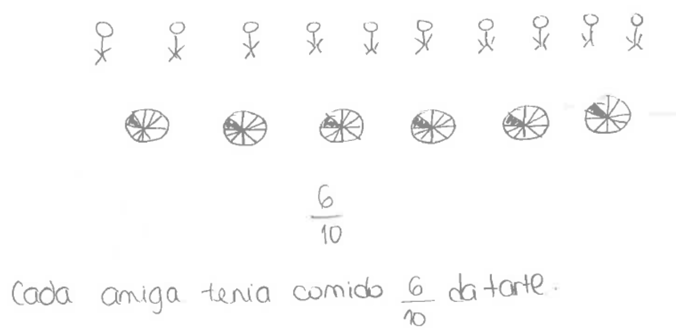

Figura 3: Fração como quociente

No entanto, importa salientar que a maioria das respostas corretas apresenta o recurso a esquemas e à representação decimal, evidenciando procedimentos aditivos (Figura 4), quando as estratégias mais eficientes requerem o recurso a procedimentos, que Vergnaud (1983) designa por multiplicativos. Assim, apesar de responderem corretamente, estes futuros professores revelam um conhecimento sobre fração, e aqui em particular no que se refere a um contexto de quociente, que se fica por uma representação pictórica associada à adição que não seria expectável que a maioria dos alunos do 6.º ano de escolaridade efetuasse, mantendo-se somente ao nível de um CCK e neste bastante elementar. Esta elementaridade do conhecimento dos futuros professores leva-nos a problematizar os passos seguintes para a construção/desenvolvimento do seu conhecimento matemático especificamente relacionada com a atuação docente, pois o ponto de partida se revela de um nível bastante baixo.

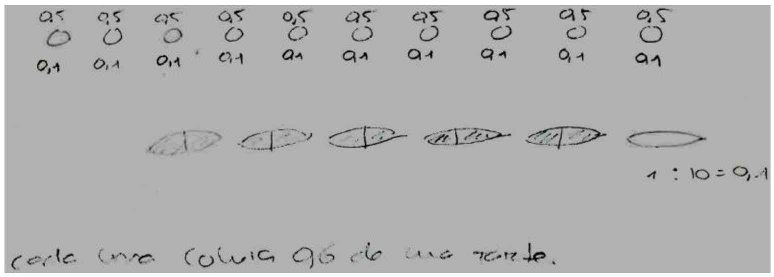

Figura 4: Fração como quociente

Deste modo, alguns estudantes parecem não estar muito familiarizados com a representação fracionária e revelaram sérias limitações ao nível do desenvolvimento do seu raciocínio multiplicativo. Dos 79% dos estudantes que evidenciaram pouca familiaridade com este significado da fração, a maioria apresentou como principal dificuldade o mal-entendido de que o dividendo tem de ser sempre superior ao divisor (identificado por alguns investigadores – e.g., Monteiro & Pinto, 2007), o que os levou a trocarem o dividendo pelo divisor. Não atribuíram, portanto, sentido à impossibilidade contextual de dividir amigas por tartes, pelo que evidenciaram dificuldades em relacionarem símbolos com conhecimentos e ações informais de forma significativa (Figura 5).

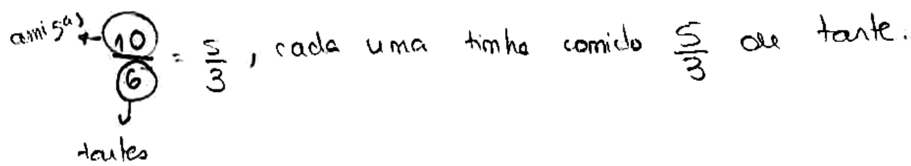

Figura 5: Fração como quociente

Estas respostas revelam que os futuros professores nem sequer equacionam a impossibilidade de, considerando o contexto específico, cada amiga não poder comer mais do que uma tarte (não equacionam o que poderia representar o 5/3 no contexto do problema fornecendo respostas completamente descabidas face ao que tinha sido questionado), ou simplesmente desconhecem o facto de que quando o numerador representa uma quantidade maior que a do denominador, a fração representa uma quantidade maior que a unidade.

Também as questões que envolvem a fração como operador apresentam uma grande percentagem de respostas incorretas. Assim, perante a questão "*No dia do seu aniversário o Manuel levou para a escola um saco com 30 gomas. Deu aos seus colegas de turma 3/5 dessas gomas. Com quantas gomas ficou o Manuel?*", 64% dos estudantes não conseguiu calcular 3/5 de 30. Surgiram resoluções que evidenciam, por um lado, um completo desconhecimento de que a fração pode ser encarada como algo que não é parte-todo e, por outro, o recurso à álgebra pela álgebra, completamente dissociada, inclusivamente, das possíveis representações pictóricas que efetuaram – dificuldades em navegar entre diferentes representações. Assim, consideram perfeitamente normal obter como resposta 27/5, ao recorrerem a procedimentos algébricos para retirarem 3/5 a 30 gomas, revelando desconhecer inclusivamente a forma de subtrair algebricamente duas quantidades (não sabem sequer "a regra" que poderá ser, quando muito aquilo que lhes foi transmitido), não detendo um conhecimento que lhes permita relacionar símbolos e ações informais de forma significativa (Figura 6). Durante a discussão uma das alunas refere que sabe que "*os números de baixo têm de ser iguais, portanto, basta multiplicar por cinco… é a regra*", o que ilustra também a utilização da álgebra pela álgebra, mas sem qualquer associação significativa entre o que fazem e o sentido do que fazem (e.g., Ribeiro, em preparação). Estas dificuldades dos estudantes podem estar associadas ao facto de nunca terem sido confrontados, pelo menos de forma explícita (ou se o foram, pelo menos não atribuíram qualquer significado), com situações em que a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto.

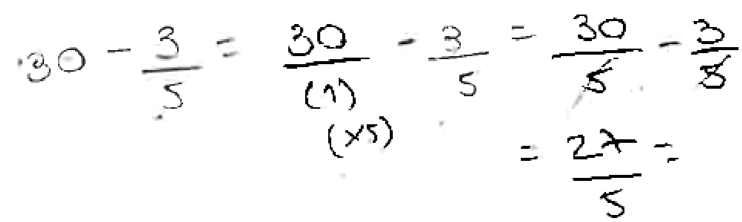

Figura 6: Fração como operador

Estes estudantes revelam sérias lacunas em termos dos diferentes significados das frações, o que só por si já é indicativo das dificuldades na compreensão do conceito de número racional, uma vez que este requer a compreensão dos vários significados de fração, bem como das suas inter-relações (e.g., Kieren, 1976).

Quando considerando a importância da unidade de referência, estes estudantes revelam também algumas dificuldades. Perante a questão "*O André coleciona miniaturas de aviões. Quatro destas miniaturas correspondem a 1/3 do número total da sua coleção. Quantas miniaturas de aviões tem o André na sua coleção?*", apenas 50% dos estudantes revelou um conhecimento que lhe permitiu obter uma resposta correta. Ainda assim, a maioria destes estudantes recorreu a esquemas e procedimentos aditivos para responder à questão (Figura 7), quando se pressupõe um conhecimento matemático que permita o recurso a estratégias mais eficientes de resolução – no caso, procedimentos multiplicativos. Este desconhecimento relativo à reconstrução da unidade é tão mais problemático pois associa-se, de forma direta, a um (não) entendimento da divisão de inteiros e de uma associação, com significado, entre esta e os racionais (e.g., Ribeiro, 2011), o que torna, também, de difícil concretização uma plena compreensão da noção de fração e das operações que as envolvem.

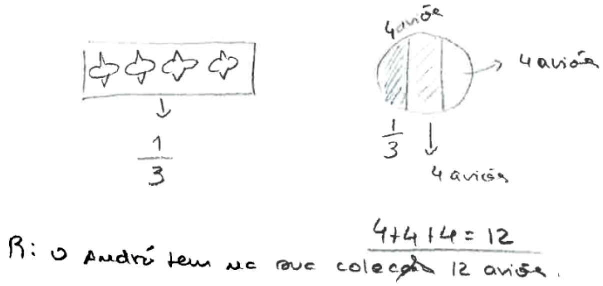

Figura 7: Reconstrução da unidade de referência

A correspondência entre diferentes representações do mesmo número também se revelou problemática para 50% dos estudantes, sendo que as maiores dificuldades se verificaram na conexão de numeral misto com numeral decimal. Assim, ficou evidente, mais uma vez, as dificuldades destes estudantes em lidar com símbolos e linguagem matemática formal de forma significativa (Figura 8).

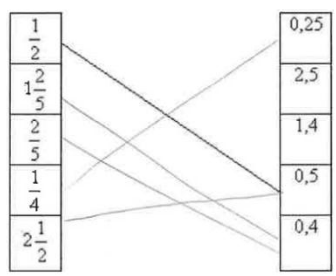

Figura 8: Correspondência entre diferentes representações

Quando solicitados a identificarem duas frações não equivalentes em grupos de quatro frações em que duas eram equivalentes, 43% dos estudantes erraram esta identificação, revelando mais do que o desconhecimento da regra de equivalência de frações, um desconhecimento da fração como quociente e, por conseguinte, dificuldades em lidar com símbolos e matemática formal de forma significativa (Figura 9).

$\frac{2}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{6}$	$\frac{12}{15}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{8}{15}$	$\frac{7}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{2}{5}$

Figura 9: Identificação de frações não equivalentes

Relativamente à comparação, ordenação e densidade de números racionais, também foram identificadas dificuldades na maioria dos estudantes; 93% revelaram dificuldades na comparação de frações, sendo que destes, 77% não apresentaram qualquer resposta. Os 23% que apresentaram uma resposta errada revelaram dificuldades em comparar frações, mesmo com igual denominador (Figura 10).

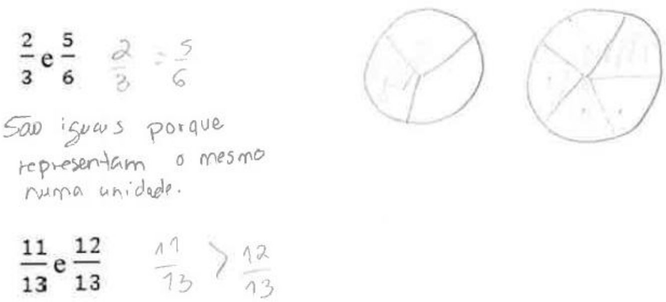

Figura 10: Comparação de frações

A densidade de números racionais não foi identificada por 73% dos estudantes, sendo que mesmo entre os estudantes que admitiram existir infinitos números entre os números 2 e 2 1/5, alguns apresentaram dificuldades em identificar um número entre os referidos, tendo surgido respostas como 1,5. É mais uma componente do sentido de número racional que, de acordo com alguns investigadores, (e.g., Monteiro & Pinto, 2007) facilita a compreensão de número racional.

Decorrente do exposto, fica evidente que a maioria destes futuros professores apresenta dificuldades em todas as componentes do sentido de número racional e, por conseguinte, uma evidente falta de sentido de número racional. As dificuldades reveladas situam-se ao nível do CCK (também associado às questões concretas com que foram confrontados – de nível similar ao que se espera que os seus possíveis alunos possam vir a resolver) e definem um ponto de partida bastante baixo para a concetualização de formas de incrementar o MKT destes futuros professores e elevá-lo a níveis que consideramos minimamente aceitáveis à saída da formação inicial. Estas dificuldades reveladas nesta etapa são, também, responsabilidade nossa (formadores de professores) e um dos aspetos que urge ser alterado – para permitir que os professores do futuro proporcionem aos alunos de Amanhã ricas, amplas e significativas oportunidades de aprendizagens sustentadas numa efetiva compreensão dos conteúdos e raciocínios associados.

ALGUNS COMENTÁRIOS FINAIS E IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Estes futuros professores revelam um conhecimento do sentido de número racional alinhado com as mesmas dificuldades, reveladas por alunos dos primeiros anos e descritas na literatura (e.g., Behr, Harel Post & Lesh, 1993; Kieren, 1976; Kribs-Zaleta, 2006; Monteiro & Pinto, 2005; Streefland, 1991), evidenciando claras dificuldades em lidar com as diferentes componentes que caraterizam o referido sentido – fundamentais para uma compreensão significativa do conceito de número racional (e.g. Behr et al., 1992; Lamon, 2007; McIntosh et al., 1992; Monteiro & Pinto, 2005, 2007). Estas dificuldades e limitações no seu conhecimento de números racionais, se não forem colmatadas, impossibilitarão o desenvolvimento de um sustentado MKT que, na melhor das hipóteses, possibilitará apenas uma abordagem direta e sem compreensão aos e dos tópicos matemáticos, não permitindo, portanto, aos alunos, uma aprendizagem matemática com significado e significação.

Estes resultados preliminares já permitem sustentar a urgência de uma alteração na formação de professores, de modo a que esta se foque onde é efetivamente necessária e permita contribuir verdadeiramente para desenvolver o conhecimento matemático dos (futuros) professores, associado especificamente à atuação docente. Esta alteração na formação não pode limitar-se a uma operação de estética, em que se tenta remediar as carências em termos de (entre outros) entendimento dos porquês com a exploração de tarefas "giras", mas sem intencionalidade matemática ou sem que os estudantes efetivamente as entendam, nomeadamente no que concerne às suas potencialidades e alcance. Por conseguinte, a referida alteração na formação de professores e uma perspetiva de efetuar uma efetiva aproximação entre teoria e prática – para que deixe de ser uma dicotomia – deverão tanto sustentar-se nos resultados da investigação, como contribuir para o avanço da mesma, numa espiral cíclica que se pretende construtiva, construtora e sustentadora de um sólido e amplo conhecimento do professor. Nesse sentido, podemos considerar três aspetos fundamentais a que urge dar prioridade nessa busca, que se quer incessante, de melhoria da formação: (i) que as tarefas que preparamos e implementamos (e como o fazemos) assumam um lugar de destaque na formação (encarando aqui a formação de uma maneira ampla, incluindo desde os alunos aos professores em exercício), e que o principal objetivo de qualquer tarefa seja o de iniciar uma atividade matemática frutífera (Mason & Johnston-Wilder, 2006); (ii) que as carências de conhecimento influenciam a natureza das tarefas que preparamos e como as implementamos em sala de aula, concretamente no que concerne à regulação da exigência matemática (Charalambous, 2008); e (iii) que nos cumpre também possibilitar aos nossos formandos situações similares que esperamos que eles possam facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom & Moyer, 2011). Estes aspetos essenciais, conjugados com a identificação de situações matematicamente críticas, e um mais amplo entendimento sobre os possíveis motivos que as sustentam, assumem um papel de destaque na concetualização e elaboração de tarefas para a formação, pois permitem-nos equacionar formas de discutir, refletir e incrementar diferentes aspetos (subdomínios) do conhecimento matemático para ensinar dos futuros professores – considerando que este pode ser, efetivamente, ensinado (e.g., Hill & Ball, 2004). Para a preparação e concetualização de tarefas com esta natureza, foco e forma (um dos aspetos em que a investigação é, ainda, parca), devemos também ter em consideração que o conhecimento sobre números racionais (ou qualquer outro tópico – matemático ou não), que os futuros professores (estudantes das Instituições de Ensino Superior) venham a desenvolver, encontra-se relacionado com o conhecimento dos seus formadores e a forma como estes encaram a matemática, o processo de ensino, e a formação.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.

Caseiro, A. & Ribeiro, C. M. (2012). Conhecimento de futuros professores dos Primeiros Anos: uma experiência com racionais. In R. Cadima, I. Pereira, H. Menino, I. S. Dias & H.

Pinto (Eds.), *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 393-400). Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, Mexico: PME.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fraction. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 237-246). Reston: NCTM.

GAVE (2010). *Relatório 2010*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

Graeber, A., Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 95-102.

Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1994). The impact of number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 365-388). Albany, NY: SUNY Press.

Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. to appear). Antalia, Turquia: ERME.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M. & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 4635-4644). Seoul (Coreia): ICME.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Krainer, K., Hsieh, F.-J., Peck, R. & Tatto, M. T. (2012). Teacher education and development study - learning to teach mathematics (TEDS-M). In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 42-43). Seoul (Coreia).

Kribs-Zaleta, C. M. (2006). Estrategias construidas para la división de fracciones. In P. B. Catalán, M. J. G. López & M. M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 154-160). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, Universidad Zaragoza.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Magiera, M., van_den_Kieboom, L. & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35thIGPME Conference* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin.

McIntosh, A., Reys, J. e Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12* (3), 2-8 e 44.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-107.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o Sentido do Número Racional*. Lisboa: APM.

Nye, B., Konstantopoulos, S. & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa.* (Tese de Doutoramento), Universidade de Lisboa, Lisboa: Instituto de Educação.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1988). Intermediate teachers knowledge of rational number concepts. In e. a. Fennema (Ed.), *Papers from First Wisconsin Symposium for Research on Teaching and Learning Mathematics* (pp. 194-219). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

Potari, D., Berg, C., Charalambous, C., Figueiras, L., Hošpesová, A., Ribeiro, C. M., Santos, L., Skott, J. & Zehetmeier, S. (2013). Group 17 - From a study of teaching practices to issues in teacher education: Introduction *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. to appear). Antalia, Turquia: ERME.

Ribeiro, C. M. (2009). Interacções entre as cognições do professor e sua influência na prática lectiva: um olhar sobre uma aula de matemática no 1.º Ciclo. In B. D. d. Silva, L. S. Almeida, A. B. Lozano & M. P. Uzquiano (Eds.), *Actas do X Congresso Internacional Galeco-Português de Psicopedagogia* (pp. 3034-3049). Braga: Universidade do Minho.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M. & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME.

Ribeiro, C. M. & Carrillo, J. (2012). The role of MKT in classroom practice. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 4705-4713). Seoul (Coreia): ICME.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J. & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(2), 277-310.

Ribeiro, C. M. & Jakobsen, A. (2012). Prospective teachers' mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 289-298). Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Ribeiro, C. M., Mellone, M. & Jakobsen, A. (2013a). Give sense to students productions: a particular task in teachers education. In J. Novotná, & H. Moraová (Ed.) Proceedings do *International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT 12) – Tasks and tools in elementary mathematics,* (pp. 273-281). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education. (ISBN: 978-80-7290-637-6)

Ribeiro, C. M., Mellone, M. & Jakobsen, A. (2013b). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.). Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – mathematics learning across the life span, Vol. 4, (pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

Ribeiro, C. M. (em preparação). Expandindo o conhecimento matemático para ensinar e alguns contributos da discussão de situações matematicamente críticas com respostas múltiplas no caso dos racionais.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1-94.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 472-494.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37* (3), 251-274. Disponível na WWW<URL:http://www.scribd.com/doc/208018/1999-the-Role-of-Operation-Sense-in-Transitions-From

Stake, R. E. (2000). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

Streefland (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*: Kluwer Academic Publishers.

Tatto, M. T., Senk, S., Rowley, G. & Peck, R. (2011). The Mathematics Education of Future Primary and Secondary Teachers: Methods and Findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. *Journal of Teacher Education, 62*(2), 121-137.

Vanhille, L. S. & Baroody, A. J. (2002). Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: NCTM 2002 Yearbook* (pp. 224-236). Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hilbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 8, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Wilson, S., Shulman, L. & Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers thinking* (pp. 104 - 124). Londres: Cassel.