Raciocínio espacial e pensamento algébrico: o estabelecimento de conexões na formação inicial de professores[1]

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

DOI: https://doi.org/10.25757/invep.v10i2.208

Resumo

Este artigo relata uma investigação realizada no âmbito da formação inicial com futuros professores e educadores. O objetivo é identificar as potencialidades de um problema de contagens relativamente ao desenvolvimento do raciocínio espacial e pensamento algébrico. Os dados foram recolhidos a partir das resoluções de uma turma e a análise incidiu nos processos de raciocínio espacial, no tipo de representações usadas para exprimir ideias algébricas, na sua compreensão e mobilização de pensamento funcional. O estudo sugere que este tipo de tarefas constitui uma proposta relevante, pois conduz à necessidade de generalizar, favorecendo o estabelecimento de conexões entre o raciocínio espacial e o

---

Brunheira, L., (2020) Raciocínio espacial e pensamento algébrico: o estabelecimento de conexões na formação inicial de professores, *Da Investigação às Práticas,* 10(2), 69 - 89.

DOI: https://doi.org/10.25757/invep.v10i2.208

Contacto: Lina Brunheira, Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa, e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Campus de Benfica do IPL, 1549-003 Lisboa / patriciaferreira@eselx.ipl.pt

(Recebido em fevereiro de 2020, aceite para publicação em julho de 2020)

---

[1] Este artigo teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (Projeto IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017).

pensamento algébrico. A sua realização, seguindo uma abordagem exploratória, favorece a diversidade de abordagens, que vão ao encontro das experiências e conhecimentos dos formandos. A sua partilha e discussão pode promover o confronto de diferentes representações, valorizar a sua compreensão e favorecer a progressão para níveis mais formais.

Palavras-chave: Raciocínio Espacial; Pensamento Algébrico; Conexões; Formação inicial de professores.

SPATIAL REASONING AND ALGEBRAIC THINKING: THE ESTABLISHMENT OF CONNECTIONS IN INITIAL TEACHER TRAINING

Abstract

This article reports a research in the context of a K-6 prospective teacher education program. The objective is to identify the potential of a counting problem in relation to the development of spatial reasoning and algebraic thinking. The data was collected from the records of a class. The analysis focused on the spatial reasoning processes and the type of representations used to express algebraic ideas, their understanding and the mobilization of functional thinking. The study suggests that this type of task is a relevant proposal, as it leads to generalization, favours connections between spatial reasoning and algebraic thinking. The use of these tasks according to an exploratory approach, favours the emergence of different approaches, which meet the experiences and knowledge of the trainees. The collective discussion has the potential to promote the confrontation of different representations, values their understanding and favours progression to more formal levels.

Keywords: Spatial reasoning; Algebraic Thinking; Connections; Teacher Education.

RAZONAMIENTO ESPACIAL Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO: ESTABLECER CONEXIONES EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO

Resumen

Este artículo reporta una investigación realizada en el ámbito de la formación inicial con futuros maestros y educadores. El objetivo es identificar el potencial de un problema de conteo con respecto al desarrollo del razonamiento espacial y el pensamiento algebraico. Los datos fueron recolectados de las resoluciones de una clase y el análisis se centró en los procesos de razonamiento espacial, el tipo de representaciones utilizadas para expresar ideas algebraicas, su comprensión y la movilización del pensamiento funcional. El estudio sugiere que este tipo de tarea es una propuesta relevante, ya que conduce a la necesidad de generalizar, favoreciendo el establecimiento de conexiones entre el razonamiento espacial y el pensamiento algebraico. Su realización, siguiendo un enfoque exploratorio, favorece la diversidad de enfoques, que se encuentran con las experiencias y conocimientos de los aprendices. Su intercambio y discusión puede promover la confrontación de diferentes representaciones, mejorar su comprensión y favorecer la progresión a niveles más formales.
Palabras clave: Razonamiento espacial; Pensamiento algebraico; Conexiones; Formación inicial

del profesorado.

RAISONNEMENT SPATIAL ET PENSÉE ALGÉBRIQUE: ÉTABLIR DES LIENS DANS LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS

Résumé

Cet article présente une recherche dans le cadre de la formation initiale de futurs enseignants et éducateurs. L'objectif est d'identifier le potentiel d'un problème de comptage, en relation avec le développement du raisonnement spatial et le pensée algébrique. Les données ont été collectées à partir des enregistrements d' une classe. Son analyse s'est concentrée sur les processus de raisonnement spatial et le type de représentations utilisées pour exprimer les idées algébriques, leur compréhension et la mobilisation de la pensée fonctionnelle. L'étude suggère que ce type de tâche est une proposition pertinente, car elle conduit à généralisation, à connexions entre le raisonnement spatial et la pensée algébrique. L'exécution de ces tâches, dans une dynamique pédagogique exploratoire, favorise l'émergence de différentes approches, qui répondent aux expériences et aux connaissances des futurs enseignants. Leur discussion peuvent favoriser la confrontation de différentes représentations, améliorer leur compréhension et favoriser la progression vers des niveaux plus formels.

Mots clés: Raisonnement Spatial; Pensée Algébrique; Connexions; Formation Initiale des Enseignants.

INTRODUÇÃO

Uma das principais razões que tem reforçado a importância do trabalho com conexões em sala de aula é a necessidade de contrariar visões estreitas da matemática e que conduzem à fragmentação do conhecimento, à mecanização e incompreensão (Carreira, 2010). A escolha das conexões, pelo NCTM (2007), como uma das normas para a matemática escolar da educação pré-escolar ao ensino secundário pretende sublinhar que a matemática não é um conjunto de temas ou normas soltas, apesar de ser frequentemente organizada e apresentada dessa forma. Esse é justamente o argumento apresentado por Albuquerque et al. (2006) que estendem a necessidade de valorizar o estabelecimento de conexões à formação inicial de professores:

> Assumindo que o conhecimento matemático não é constituído por uma listagem sequencial de tópicos separados entre si, nem uma listagem de regras e definições, ter uma compreensão aprofundada da unidade matemática, isto é, das conexões entre conceitos pertencentes aos diferentes temas, passa por se ter uma visão integrada dos conteúdos matemáticos, recorrendo a um mesmo conceito em diversos contextos matemáticos e fazer recurso a diversas perspectivas ou abordagens. Só esta compreensão poderá permitir, no futuro, ao professor adaptar o ensino aos seus alunos, torná-lo flexível e adequado. (p. 18)

No caso particular dos futuros educadores de infância e professores dos 1.º e 2.º ciclos, aqueles autores fazem ainda recomendações sobre a formação nos grandes temas da matemática. Restringindo-nos aos dois temas matemáticos que abordarei neste artigo – Álgebra e Geometria – sugerem que "o reconhecimento da importância da simbologia e da manipulação algébrica pode desenvolver-se através de diversas situações, como seja na formulação e justificação de generalizações, na descrição de cálculos . . . de problemas dos mais diversos domínios." (p. 29) e que é necessário desenvolver competências de visualização e representação espacial "fundamental na formação dos futuros professores, que se devem familiarizar com as representações a duas dimensões de objectos a três dimensões (vistas, planificações, …)" (p. 30).

O matemático britânico Atiyah (1982) compara a Geometria com a Álgebra assinalando uma dicotomia: "De um modo geral, quero sugerir que a geometria é a parte da matemática na qual domina o raciocínio visual, ao passo que a álgebra é aquela em que domina o raciocínio sequencial" (p. 183). Contudo, a realização de tarefas que envolvem contagens de elementos de objetos 3D e o estabelecimento de relações e justificações revelam-se promotoras dos processos de raciocínio espacial (Brunheira & Ponte, 2018), constituindo ainda um terreno propício à generalização, um processo igualmente importante no pensamento algébrico. Assim, a investigação apresentada neste artigo tem por objetivo identificar as potencialidades de um problema de contagens, envolvendo objetos geométricos complexos, relativamente ao desenvolvimento do raciocínio espacial e ao pensamento algébrico, num contexto de formação inicial de professores dos primeiros anos que segue uma abordagem exploratória.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Conexões matemáticas

Tal como noutros elementos do currículo, as conexões podem ser perspetivadas enquanto objetivo de aprendizagem, referente à capacidade para identificar e usar conexões entre ideias matemáticas e aplicá-las à resolução de problemas e ao raciocínio, conduzindo a uma visão de Matemática como um todo, e enquanto orientação metodológica, atribuindo-lhe um lugar de destaque no trabalho em sala de aula (Ponte, 2010). Associadas a estas duas perspetivas surgem duas questões fundamentais: Que tipo de conexões podemos estabelecer? Que tipo de prática favorece o estabelecimento de conexões?

Ponte (2010) organiza as conexões em três categorias: i) entre conceitos e representações de um mesmo tema; ii) entre conceitos e representações de temas distintos; e iii) entre conceitos e representações matemáticas e situações exteriores à matemática. Tomando como exemplo o conceito de número racional, podemos incluir, no primeiro grupo, as conexões entre vários tipos de representações, como a decimal e a percentagem; no segundo grupo, a sua interpretação no campo da Estatística enquanto frequência relativa; e, no terceiro grupo, a sua interpretação em contextos reais, como a leitura da carga da bateria de um telemóvel ou a escala de um mapa. Em qualquer dos casos, não se trata necessariamente de estabelecer ligações entre ideias já conhecidas, pois "o sentido que damos a uma ideia matemática depende das conexões que estabelecemos entre essa ideia e outras ideias matemáticas que possuímos" (Ponte, 2010, p. 3), ou seja, da ligação entre o que já conhecemos e estamos a conhecer. Neste sentido, o conhecimento do *icon* da carga da bateria de telemóvel pode constituir um exemplo que ilustra a aplicação do conceito de percentagem ou ser mobilizado para dar sentido à introdução daquele conceito, constituindo-se como um recurso para a sua aprendizagem (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018).

Sobre as práticas que favorecem o estabelecimento de conexões, Carreira (2010) considera que a perspetiva atual de valorizar a atividade matemática dos alunos (uma mescla entre tarefa, pessoa, compreensão matemática e não-matemática, aprendizagens novas e mobilização de aprendizagens prévias), a qual integra a resolução de problemas como uma linha de força, sugere a importância redobrada das conexões. De facto, tendo em conta a proposta de Smith e Stein (1998) para uma categorização de tarefas consoante os níveis de exigência cognitiva, encontramos no terceiro nível (exigência alta) um conjunto de características cuja referência global é "procedimentos com conexões". As características destas tarefas tendem a mobilizar procedimentos que conduzem os alunos a desenvolverem níveis mais profundos de compreensão das ideias subjacentes, procedimentos gerais e amplos que têm conexões com conceitos subjacentes e que fazem uso de múltiplas representações.

A perspetiva de valorizar a atividade matemática do aluno percorre a proposta de Ponte (2005) sobre a relevância da abordagem exploratória, dando relevo à natureza das tarefas – o ponto de partida para a atividade dos alunos – e à dinâmica das aulas. No que respeita à primeira, o investigador sublinha a diversidade nas suas diferentes dimensões: nível de exigência cognitiva, abertura, duração e contexto (matemático, real ou semirreal). Esta diversidade assume que todas as tarefas têm lugar na sala de aula, mas atribui especial destaque às não rotineiras, como a resolução de problemas, investigações e projetos cuja potencialidade para o estabelecimento de conexões é frequentemente referenciada na literatura. Já sobre a dinâmica das aulas que seguem esta abordagem, merece uma particular referência a fase de discussão coletiva que oferece "momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (p. 16).

O papel da generalização no raciocínio espacial e no pensamento algébrico

O conceito de raciocínio espacial não é novo, mas é certamente um conceito que está a merecer uma nova atenção. Na tentativa de procurar uma definição, encontramos várias ligações à visualização e algumas das dificuldades que já identificávamos neste conceito, como o uso de vários termos ou expressões (entre os quais "raciocínio visual", "pensamento espacial", "imagens mentais", "espaciais", "visuais", etc.) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.) (Gutiérrez 1996; Sinclair et al., 2016).

Tomemos como referência a proposta de Battista (2007) que define raciocínio espacial como sendo a

> capacidade de 'ver', analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar imagens, analisá-las para responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre imagens, e manter as imagens ao serviço de outras operações mentais. (p. 843)

Na perspetiva de Battista (2009), para que seja possível operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los), é necessário que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo, o que envolve a estruturação espacial. A estruturação espacial é um tipo especial de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos. Inclui identificar unidades, relações entre as unidades e reconhecer que um subconjunto de objetos, devidamente repetidos, pode gerar todo o conjunto (Battista & Clements, 1996). A estruturação espacial está assim associada a um modelo mental, ou seja, uma versão visual, não-verbal, da situação (objeto, ação…) que tem uma estrutura isomórfica à estrutura percecionada da situação e que é ativada para interpretar e raciocinar sobre ela (Battista, 2007). Desta forma, podemos afirmar que o modelo mental resulta do conjunto das imagens mentais que capturam as propriedades percecionadas do objeto.

Whiteley, Sinclair e Davis (2015) assinalam que habitualmente existe um objetivo que circunscreve o raciocínio espacial e que corresponde a investigar famílias de configurações para encontrar regularidades e invariantes, o que associamos ao processo de generalizar. De facto, para Kaput (1999) a generalização

> envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles. (p. 6)

Contudo, a generalização, considerada como um objetivo central do raciocínio espacial (Whiteley et al., 2015) e, ademais até, reconhecida como um processo central do raciocínio (Lannin, Elliot, & Ellis, 2011), constitui ainda, para vários autores, o foco principal do pensamento algébrico (Canavarro, 2007). Por exemplo, para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico corresponde ao "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (p. 413), sendo este aspeto da comunicação a marca distintiva entre pensamento algébrico e álgebra. Desta forma, como refere Canavarro (2007), a expressão das ideias algébricas pode ocorrer sem recurso à notação algébrica convencional, utilizando antes linguagem natural, tabelas, diagramas ou expressões numéricas como forma de expressar a generalização. Esta investigadora sublinha ainda um outro traço característico do pensamento algébrico e distintivo da Álgebra, ou pelo menos de uma visão deste campo muito ligada à manipulação simbólica e à reprodução mecanizada de procedimentos: a ênfase nos significados sobre as representações utilizadas resultantes de um raciocínio com compreensão.

Ainda para Canavarro (2007), os investigadores reconhecem essencialmente duas vertentes no pensamento algébrico: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. A aritmética generalizada permite analisar expressões numéricas, não em termos do valor numérico obtido, mas da sua forma, implicando generalizações acerca das operações e das suas propriedades. Por exemplo, sabemos que 37+23=23+37 sem fazer os cálculos porque sabemos que a adição goza da propriedade comutativa; também sabemos que o resultado será par, de novo sem realizar os cálculos, porque sabemos que a soma de dois ímpares é um par.

Nestes exemplos, tratámos os números algebricamente porque os encarámos de uma forma generalizada, ou seja, atendendo à sua estrutura e não ao seu valor. Este é um dos aspetos centrais da aritmética generalizada, aos quais Blanton e Kaput (2005) associam outros exemplos que não explorarei neste artigo.

O pensamento funcional envolve a generalização através da ideia de função, muito embora este conceito possa estar apenas implícito. Como refere Canavarro (2007), esta vertente está presente e inicia-se frequentemente através da generalização de padrões, "estabelecendo conexões entre padrões geométricos e numéricos para descrever relações funcionais" (p. 90), o que acontece, por exemplo, quando queremos saber determinado termo de uma sequência numérica, conhecendo a sua ordem. É nesta vertente que surge o aspeto sintático da álgebra, presente quando usamos símbolos para traduzir regularidades (como uma lei de formação), para verificar a equivalência de expressões diferentes ou determinar o valor de uma expressão.

Raciocínio espacial e pensamento algébrico na formação inicial de professores

O crescente interesse pelo raciocínio espacial que referimos anteriormente não tem sido acompanhado de orientações curriculares consistentes, com avanços e recuos no reconhecimento da sua importância, o que aconteceu no nosso país[2], como nos Estados Unidos da América[3], apesar das orientações das Normas (NCTM, 2007). No que respeita à formação de professores, é reconhecida a existência diminuta de investigação sobre o conhecimento dos professores e futuros professores no âmbito da geometria (Chapman, 2013; Clements & Sarama, 2011; Steele, 2013), particularmente acentuada no âmbito do raciocínio espacial (Brunheira & Ponte, 2018). Não obstante, num estudo anterior (Brunheira, 2019), envolvendo futuros professores dos primeiros anos, o desenvolvimento do raciocínio geométrico surge alicerçado, em grande medida, ao raciocínio espacial, o qual influencia de forma determinante a realização de processos de raciocínio centrais. Desta forma, sugere-se a realização de tarefas que favoreçam uma estruturação geométrica completa e flexível das figuras, nomeadamente através da exploração de diferentes resoluções, a discussão de ideias e a negociação de significados.

Por seu turno, o pensamento algébrico é um assunto cujo aprofundamento é relativamente recente na área da educação matemática, assim como a sua presença explícita nos currículos que, tal como acontece com o raciocínio espacial, tem sofrido avanços e recuos[4]. Como refere Canavarro (2007), até 2009/2010[5], as práticas dos professores dos 1.º e 2.º ciclos tinham estado muito afastadas das dinâmicas necessárias ao desenvolvimento do pensamento algébrico pelos seus alunos. Também como assinalam Blanton e Kaput (2011), no trabalho com as crianças dos primeiros anos de escolaridade, ainda se registam práticas de trabalho com padrões, mas com um foco exclusivo no pensamento recursivo, deixando de lado o

---

[2] Veja-se os casos do Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte et al., 2007), do Programa e Metas Curriculares de matemática para o ensino básico em vigor (MEC, 2013) e os documentos Aprendizagens Essenciais (ME-DGE, 2018)
[3] Ver os relatórios do Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS, 2000, 2012)
[4] Tenha-se de novo em conta os documentos curriculares referidos na nota 1.
[5] Primeiro ano letivo de implementação do Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte et al., 2007) para os Agrupamentos de Escolas que se candidataram.

pensamento funcional. Contudo, como referem estas autoras, sem o apoio necessário ao desenvolvimento profissional com foco no conhecimento matemático e didático, as inovações curriculares serão insuficientes.

No âmbito da formação inicial de professores dos anos iniciais, e de novo no contexto português, os formandos têm experiências muito diversas no campo da Álgebra, consoante a sua formação escolar anterior. Porém, como revela o estudo de Ponte e Branco (2013), a abordagem exploratória envolvendo tarefas com sequências pictóricas que valorizam a generalização e a progressiva formalização da linguagem simbólica revela-se muito produtiva para formandos com diferentes níveis de experiência e proficiência em Álgebra. Por um lado, estudantes com mais dificuldades e inexperiência com sequências pictóricas conseguiam formular generalizações e expressá-las simbolicamente. Por outro, para aqueles que anteriormente já conseguiam formular generalizações, o trabalho realizado teve um contributo importante na compreensão da simbologia algébrica e do significado de variável.

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

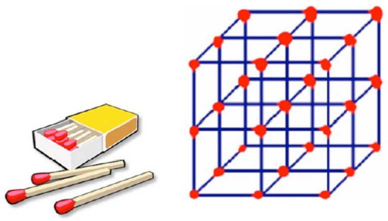
Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

A investigação apresentada neste artigo corresponde a uma investigação sobre a prática, de natureza qualitativa. Esta opção decorre, por um lado, da natureza do seu objetivo – compreender um problema que afeta a prática, neste caso o interesse em desenvolver o raciocínio espacial e o pensamento algébrico dos futuros professores – e, por outro, das potencialidades desta metodologia, entre as quais, contribuir para o desenvolvimento profissional e organizacional, "bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral" (Ponte, 2002, p. 13).

Os dados que apresento foram recolhidos no ano letivo de 2018/19 e envolveram uma turma de 27 estudantes que frequentavam a unidade curricular de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica) lecionada por mim. Habitualmente, o trabalho em aula desenvolvia-se a partir de tarefas consistentes com um ensino exploratório (Ponte, 2005) e realizadas de acordo com a dinâmica: lançamento da tarefa pela professora, seguida de trabalho em grupos de três a cinco elementos, apresentação e discussão coletiva, finalizando com uma sistematização. Uma das vertentes deste trabalho foi a realização de um conjunto de problemas, propostos pela professora, resolvidos em grupo e maioritariamente fora das aulas. Os registos das resoluções eram entregues à professora cerca de uma semana depois do seu lançamento e, na aula seguinte, o problema era discutido a partir de resoluções selecionadas.

A recolha de dados foi feita sobretudo a partir da análise documental das produções escritas sobre o problema "A malha de fósforos" (Figura 1), o segundo problema proposto, bem como a partir de observação participante. Optámos por esta tarefa pois ela envolve o trabalho com figuras tridimensionais que, na perspetiva de Gutiérrez (2017), é a área da matemática que implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial. Além disso, este tipo de tarefa corresponde ao que Battista e Clements (1996) designam por tarefa de contagem ou enumeração que, como referem, influencia e é influenciada pela estruturação espacial. Por um lado, a estruturação espacial fornece o *input* e a organização para a contagem. Por outro, as tentativas de contagem geram frequentemente a estruturação ou restruturação espacial. Assim, na altura em que a tarefa foi proposta, os objetivos focavam-se no desenvolvimento do raciocínio espacial e de estratégias que implicam um pensamento sistemático. Contudo, a experiência revelou outras potencialidades relativamente ao pensamento algébrico que motivaram esta investigação.

A malha de fósforos



O Fábio começou a construir uma malha de pequenos cubos, feita com fósforos. Cada aresta de um pequeno cubo é formada por um único fósforo, como se ilustra a figura. Até agora, apenas criou uma malha composta por 8 cubos pequenos, mas o seu objetivo é construir uma malha cúbica de 1000 cubos pequenos. De quantos fósforos irá precisar o Fábio para essa construção?

Figura 1: Tarefa proposta. Fonte: Campeonato de Matemática Sub12. Disponível em http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/10-11/subs/sub12.html

Análise de dados

As resoluções serão analisadas no que respeita ao raciocínio espacial e ao pensamento algébrico. No que se refere ao primeiro, darei destaque à forma como os grupos estruturaram espacialmente as malhas cúbicas, ou seja, aos modelos mentais que construíram sobre estes objetos. Para isso, usarei parte de um quadro de análise (Tabela 1) utilizado em Brunheira e Ponte (2018), incidente naquele processo, e que foi desenvolvido a partir das ideias de Battista (2009) e Gutiérrez (1996).

Tabela 1

Excerto de "Processos de raciocínio espacial" (Brunheira & Ponte, 2018)

Processos	Subprocessos
Construção dos modelos mentais	Interpretação visual da informação
	Identificação de subconjuntos do objeto
	Coordenação de subconjuntos do objeto
	Integração de subconjuntos do objeto

A construção de modelos inclui a *interpretação visual da informação* (como perceber como é que os fósforos estão organizados), a *identificação de subconjuntos do objeto* (como decompor a construção em pequenos cubos unitários ou em "camadas de fósforos"), a *coordenação de subconjuntos do objeto* (implica identificar relações entre os subconjuntos, por exemplo, perceber se, ao contarmos as "camadas de fósforos", há fósforos que se encontram em mais do que uma camada) e a *integração dos subconjuntos do objeto* (que se traduz, por exemplo, na coordenação de todos os subconjuntos entre si e o todo).

Relativamente ao pensamento algébrico, analisarei as representações usadas para expressar as ideias algébricas, considerando as categorias estabelecidas por Lesh, Post e Behr (citados em NCTM, 2017), nomeadamente, as *representações verbais, visuais, simbólicas, contextuais* e *físicas*, a *compreensão* sobre os significados dessas representações, a mobilização do *pensamento funcional* e o recurso à *identificação de padrões*.

RESULTADOS

A generalidade dos grupos apresentou uma solução correta, à exceção de um grupo que interpretou mal o problema e entregou uma solução para uma formulação mais simples. Para todos os outros, apesar da solução final ser idêntica, as resoluções divergem consideravelmente, quer no que respeita ao raciocínio espacial envolvido, quer na forma como mobilizaram o pensamento algébrico. É com base nesta diversidade que apresento um conjunto de excertos de três resoluções que foram apresentadas e discutidas em aula, tendo sido bastante valorizadas pelas estudantes pelas diferenças de raciocínios e ferramentas utilizados. Pela sua extensão, são apenas apresentadas partes das resoluções, pelo que deve ser tido em conta que, para todos os casos, num momento anterior, os grupos identificaram que a malha de 1000 cubos pequenos corresponde a um cubo de aresta 10.

Resolução do grupo A

A resolução do grupo A é a segunda tentativa relatada, depois de uma abordagem que consideraram complicada. O grupo prossegue ainda com outra forma de resolução, mas detenhamo-nos na apresentada na Figura 2.

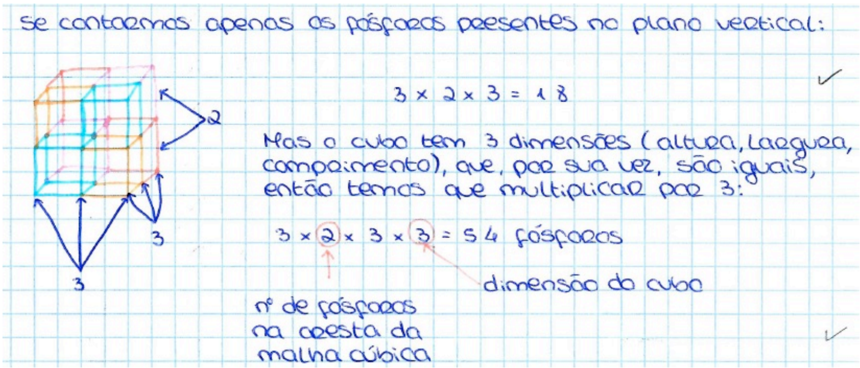
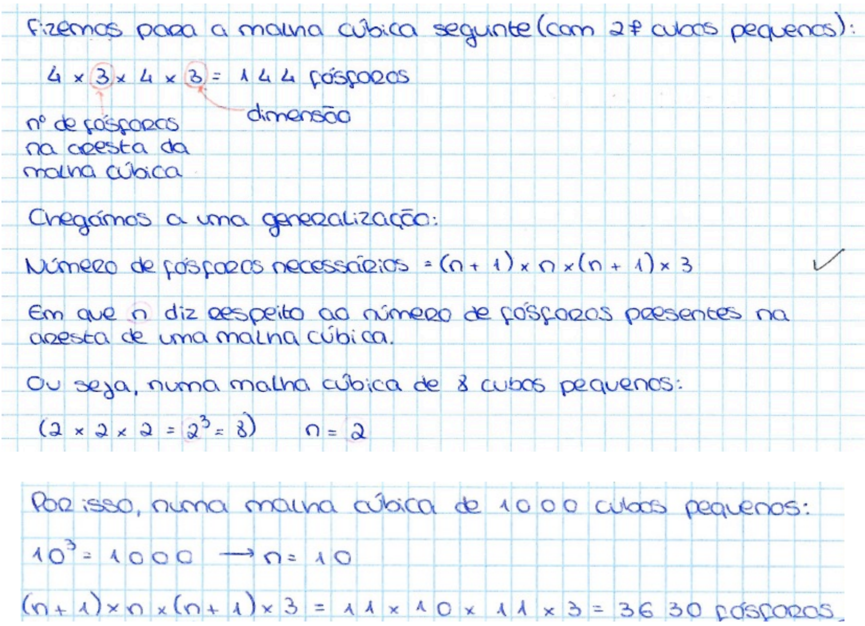


Figura 2: Resolução do grupo A para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 2

O grupo começa por contar de uma forma organizada quantos fósforos há na malha composta por 8 cubinhos. Para isso, conta os fósforos que estão na vertical e na face frontal (em 3 colunas com 2 fósforos cada) e ainda no interior da malha e na face posterior (perfazendo 3 conjuntos assinalados na imagem, totalizando 18 fósforos). Este raciocínio não é repetido para os outros fósforos porque o grupo percebe que a estratégia aplicada para os fósforos verticais está associada a uma dimensão do objeto e, dada a sua regularidade e tridimensionalidade, bastando, simplesmente, multiplicar por 3 o valor obtido.

Esta parte da resolução constitui um ensaio para o caso da malha de 1000 cubinhos e é exclusivamente a parte em que o raciocínio espacial está envolvido. No que respeita aos processos mobilizados, a resolução baseia-se sobretudo na *identificação dos subconjuntos dos objetos*, particularmente dos fósforos que estão na vertical. O reconhecimento das propriedades da malha cúbica, através da interpretação visual, torna desnecessária a sua coordenação e integração com outros subconjuntos, ou seja, com os outros fósforos.

A resolução continua com recurso ao pensamento algébrico, a partir da generalização da estratégia usada anteriormente (Figura 3):


Fizemos para a malha cúbica seguinte (com 27 cubos pequenos):

$4 \times 3 \times 4 \times 3 = 144$ fósforos

nº de fósforos na aresta da malha cúbica

dimensão

Chegámos a uma generalização:

Número de fósforos necessários $= (n + 1) \times n \times (n + 1) \times 3$

Em que n diz respeito ao número de fósforos presentes na aresta de uma malha cúbica.

Ou seja, numa malha cúbica de 8 cubos pequenos:

$(2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8)$ $n = 2$

Por isso, numa malha cúbica de 1000 cubos pequenos:

$10^3 = 1000 \longrightarrow n = 10$

$(n+1) \times n \times (n+1) \times 3 = 11 \times 10 \times 11 \times 3 = 3630$ fósforos.

Figura 3: Resolução do grupo A para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 10

A segunda parte da resolução revela que o grupo resolve o problema mobilizando o *pensamento funcional*, através do estabelecimento de uma correspondência entre o número de fósforos presentes na aresta da malha cúbica e o número total de fósforos. Neste caso, podemos considerar a *identificação de um padrão*, pois o grupo começa pelo estudo do caso mais simples (aresta 2), considera o caso seguinte (aresta 3) que não é pedido nem resolve o problema, seguindo só depois para o caso correspondente à solução do problema (aresta 10). Os seus registos recorrem a diferentes tipos de representações, com particular destaque para as *representações verbais, visuais* e *simbólicas* (Lesh, Post, & Behr, citados em NCTM, 2017) na forma de expressões numéricas e algébricas em que revelam uma *compreensão dos significados* dos símbolos e dos números, quer para a constante 3 (correspondente às 3 dimensões), quer para a variável *n* (correspondente ao número de fósforos numa aresta). Apesar de não fazerem referência ao significado da expressão *n+1*, a mobilização dos dois primeiros casos parece ter sido importante para chegarem à generalização de que o número de subconjuntos (fósforos numa direção) seria sempre uma unidade a mais relativamente ao número de fósforos na aresta.

Resolução do grupo B

Tal como o grupo A, o grupo B começa por usar uma estratégia que aplica ao cubo de aresta 2 (aqui ausente) e, de seguida, replica-a para o cubo de aresta 10 (Figura 4).

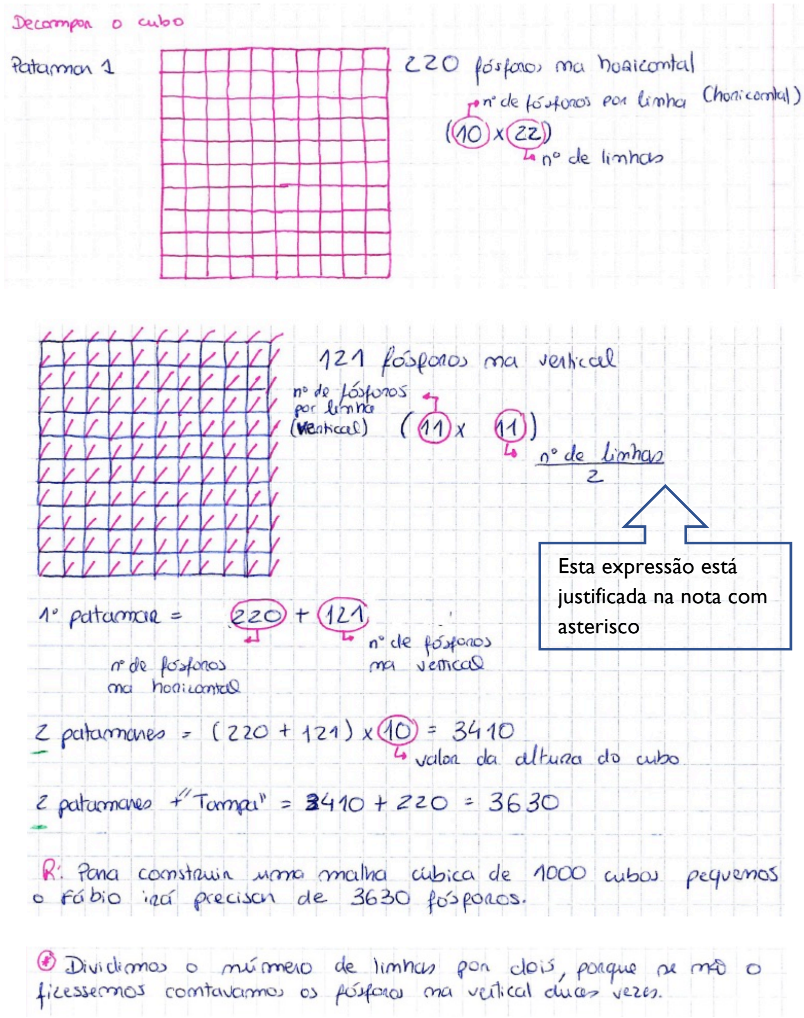


Figura 4: Resolução do grupo B para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 10

A sua contagem parte da face topo onde contam 10 fósforos em 22 linhas (horizontais e verticais). A este resultado acrescentam os fósforos verticais que se ligam aos anteriores, formando o que chamam de "patamar". Assim, a contagem do número de fósforos decorre de um modelo mental organizado a partir da *identificação dos subconjuntos de objetos*: os patamares (em que contam 10, apesar de escreverem por engano 2) e a "tampa" (Figura 5). Estes subconjuntos estão bem *coordenados* – o que é bastante percetível na sua organização pela preocupação de não repetir fósforos. É ainda evidente a *integração dos subconjuntos* que, efetivamente, geram o cubo de aresta 10, conduzindo a um resultado correto.

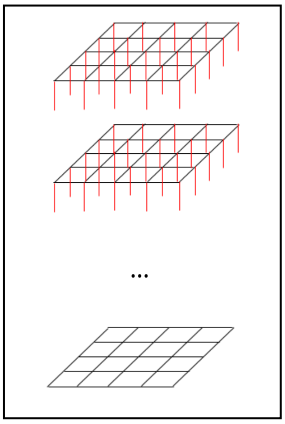


Figura 5: Figura explicativa do modelo mental construída pela autora

Esta resolução tem alguns aspetos distintivos da resolução do grupo B que assinalo. Por um lado, o raciocínio espacial está presente nas várias etapas, já que a determinação do número de fósforos do cubo de aresta 10 depende da forma como organizam mentalmente este caso. O caso do cubo de aresta 2 serviu mais para ensaiar esta organização, do que para encontrar um padrão – uma estratégia que reconhecemos na resolução do grupo A. Por outro lado, o pensamento algébrico é, na resolução do grupo B, menos evidente, embora não esteja ausente. Menos evidente pois não há recurso a expressões algébricas, nem utilização de variáveis, destacando-se antes as *representações visuais e verbais*. Presente porque, apesar de não ser apresentada uma generalização para uma malha cúbica qualquer, a legendagem de vários valores constitui uma forma de generalização. Por exemplo, o valor 10 assume dois significados: "o número de fósforos por linha" e o "valor da altura do cubo". Desta forma, esta resolução corresponde também a uma forma de *pensamento funcional* em que não é utilizada simbologia algébrica, mas onde é claro que existe uma ideia de variável com a *compreensão sobre o significado* dos valores que pode assumir.

Resolução do grupo C

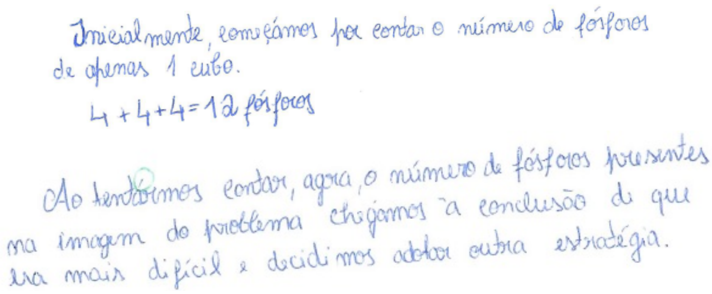


Figura 6: Primeira abordagem ao problema do grupo C

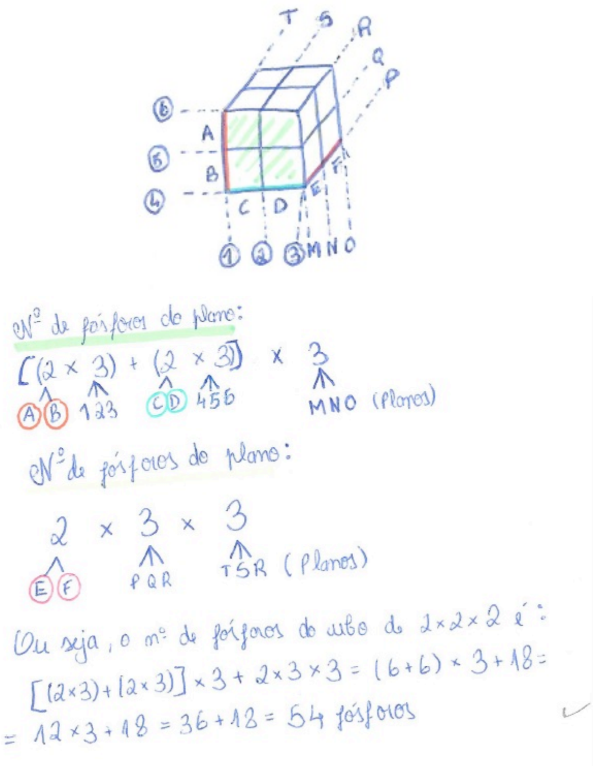


Figura 7: Resolução do grupo C para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 2

O grupo repete exatamente o que foi feito para o cubo de aresta 2, para cubos de aresta 3 e 4 (geométrica e analiticamente, Figura 8).

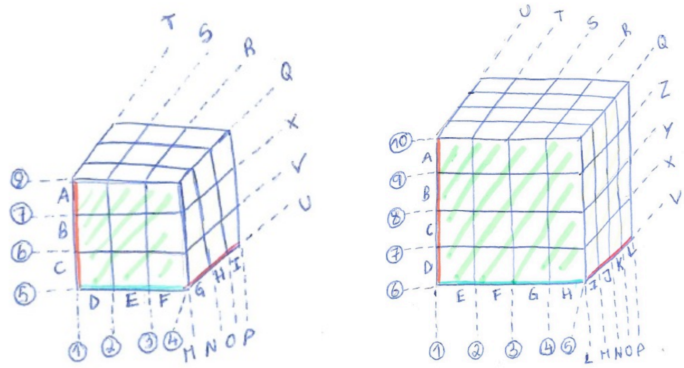
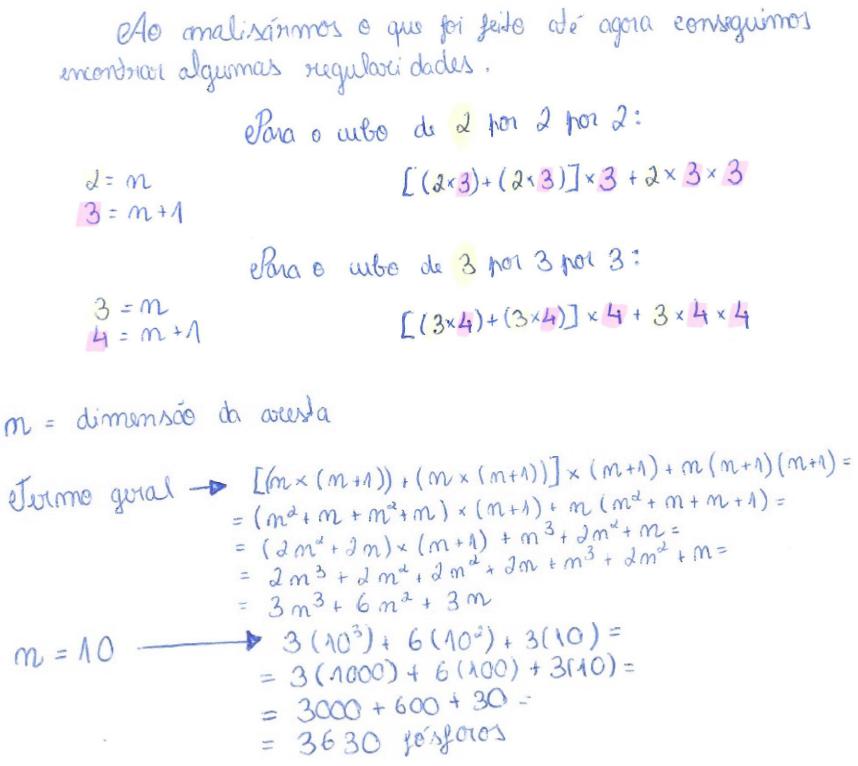


Figura 8: Resolução do grupo C para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 3 e 4

É a partir dessa análise que o grupo expõe as regularidades encontradas e que lhes permite chegar a uma generalização para aplicar ao cubo de aresta 10 (Figura 9).



Ao analisarmos o que foi feito até agora conseguimos encontrar algumas regularidades.

Para o cubo de 2 por 2 por 2:

$2 = n$
$3 = n+1$

$$[(2\times 3)+(2\times 3)]\times 3 + 2\times 3\times 3$$

Para o cubo de 3 por 3 por 3:

$3 = n$
$4 = n+1$

$$[(3\times 4)+(3\times 4)]\times 4 + 3\times 4\times 4$$

n = dimensão da aresta

Termo geral $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
&[(n\times(n+1))+(n\times(n+1))]\times(n+1)+n(n+1)(n+1) = \\
&= (n^2+n+n^2+n)\times(n+1)+n(n^2+n+n+1) = \\
&= (2n^2+2n)\times(n+1)+n^3+2n^2+n = \\
&= 2n^3+2n^2+2n^2+2n+n^3+2n^2+n = \\
&= 3n^3+6n^2+3n
\end{aligned}$$

$n = 10 \longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&3(10^3)+6(10^2)+3(10) = \\
&= 3(1000)+6(100)+3(10) = \\
&= 3000+600+30 = \\
&= 3630 \text{ fósforos}
\end{aligned}$$

Figura 9: Resolução do grupo C para o número de fósforos de uma malha cúbica de aresta 10

No que respeita à forma como estruturam as malhas cúbicas, a referência inicial mostra a consciência do grupo relativamente à necessidade de organizar a contagem de forma a não repetir nem omitir qualquer fósforo. A contagem inicial dos fósforos do cubo de aresta 1 (Figura 6) poderia ser mobilizada na identificação do número de cubos unitários nas outras malhas, mas o grupo abandonou a estratégia por perceber a repetição do mesmo fósforo em vários cubos, dificultando a sua coordenação.

A resolução que adotaram depois mostra, a partir dos seus registos cuidados, um modelo mental assente na *identificação de subconjuntos dos objetos*: os fósforos que estão no plano frontal e seus paralelos (Figura 10, a preto) e os restantes que lhe são perpendiculares (Figura 10, a vermelho). A resolução mostra que existe uma *coordenação dos subconjuntos* de objetos que, mesmo sem serem visíveis, estão bem localizados através do esquema simbólico que o grupo definiu, bem como a sua *integração* que oferece um resultado completo do número de fósforos da malha.

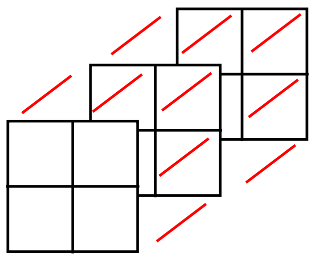


Figura 10: Figura explicativa do modelo mental construída pela autora

Nesta resolução observamos traços muito fortes de raciocínio espacial, mas também de pensamento algébrico. Por um lado, o grupo utiliza mais exemplos de malhas cúbicas (aresta 2, 3 e 4) antes de avançar para a malha de aresta 10. Os seus esquemas evidenciam a presença de regularidades geométricas, mas a *identificação de um padrão numérico*, assinalado a cor na Figura 9, parece ter um papel fundamental para chegarem à generalização. Nesta resolução, além da utilização da simbologia através da qual é apresentada a generalização (a que chamam termo geral, associando claramente a uma sequência), observamos ainda a manipulação algébrica com que alguns elementos do grupo estão familiarizados pela sua formação escolar. Inversamente, a sua explicação revela menor preocupação em traduzir o significado dos valores, deixando que as *representações visuais e simbólicas* "falem por si". Em todo o caso, tal como nos outros grupos, também parece evidente a *compreensão* sobre o significado das expressões e a presença de *pensamento funcional*.

DISCUSSÃO

O problema apresentado nesta investigação constitui um exemplo que Battista e Clements (1996) designam por tarefa de contagem, promotora de uma atividade que influencia e é influenciada pela estruturação espacial que os indivíduos realizam sobre os objetos. Um estudo anterior (Brunheira & Ponte, 2018) confirmou o seu interesse para o desenvolvimento do raciocínio espacial de futuros professores, constituindo ainda um terreno propício à generalização. Esta investigação alarga o âmbito de análise das potencialidades destas tarefas, incidindo também no desenvolvimento do pensamento algébrico.

As três resoluções apresentadas neste artigo revelam aspetos comuns, mas também divergentes. Em todas identificamos aspetos próprios do raciocínio espacial e do pensamento algébrico, embora possamos considerar que a primeira resolução tem um carácter mais algébrico, a segunda mais geométrico e a terceira equilibra as duas abordagens. Esta identificação de estilos permite-nos avançar, desde já, com uma conclusão que considero relevante: este tipo de tarefa permite ir ao encontro de diferentes estilos de aprendizagem e experiências que, num contexto de formação inicial de professores dos primeiros anos, é um aspeto muito significativo. Como percebemos pelas três resoluções, as estudantes estão familiarizadas de forma distinta com a simbologia algébrica, mas, tal como refere Canavarro (2007) sobre a aprendizagem das crianças, a expressão das ideias algébricas pode ocorrer sem recurso à notação algébrica convencional e é importante que se faça um percurso consistente até à utilização de uma linguagem mais formal. Nesse percurso, como afirmam Ponte e Branco (2013), além da importância de se envolverem na generalização, os futuros professores precisam de dar significado à expressão das ideias algébricas, o que considero ter sido uma constante nas resoluções desta tarefa.

Um outro aspeto associado à diversidade de abordagens, diz respeito às representações usadas. Também neste aspeto, as resoluções exibem diferentes tipos de representações – verbais, simbólicas e visuais – embora com diferentes níveis de desenvolvimento. Há, no entanto, um aspeto comum: o estabelecimento de conexões entre as representações visuais e simbólicas que ilustram as conexões entre a Álgebra e a Geometria. Estas conexões favorecem uma visão integrada da Matemática e o recurso a diferentes perspetivas e abordagens defendida por Albuquerque et al. (2006). Contudo, além do valor das conexões estabelecidas em cada resolução, é necessário valorizar a diversidade de abordagens na turma, pela partilha e discussão, a que o ensino exploratório procura dar resposta. No caso particular deste problema, esta partilha teve um impacto significativo nalgumas estudantes que se mostraram surpreendidas pela quantidade de estratégias possíveis e pela diferença das suas abordagens.

No que respeita ao raciocínio espacial, a resolução do problema implica necessariamente a interpretação visual da informação (que todos os grupos, à exceção de um, realizaram corretamente) que é fornecida no enunciado através de representações verbal e visual, a partir das quais se deve compreender a organização da malha cúbica. A posterior contagem requer a identificação de subconjuntos do objeto que varia significativamente entre resoluções, o que é natural dada a diferença entre as formas como os indivíduos percecionam os objetos, dando origem à estrutura que é ativada para interpretar e raciocinar sobre eles (Battista, 2007). A coordenação e integração dos subconjuntos constituiu um processo importante em duas das resoluções, garantindo que não se omitissem fósforos nem se repetisse a sua contagem.

Considerando agora as características da tarefa que foram importantes para o envolvimento das formandas em raciocínio espacial e pensamento algébrico, destaco as seguintes: a tarefa de contagem, com um objetivo claro e sem pré-requisitos, possibilitando diferentes resoluções que estão dependentes da forma como os indivíduos estruturam os objetos (Battista & Clements, 1996); o nível de desafio que é proporcionado pelo foco num objeto tridimensional com propriedades geométricas e que, como afirma Gutiérrez (2017), implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial; e, finalmente, a proposta envolvendo um número grande (malha cúbica de 1000 cubinhos) que conduz à necessidade de generalizar.

CONCLUSÃO

As tarefas de contagem envolvendo objetos geométricos tridimensionais com um nível significativo de complexidade constituem uma proposta relevante no âmbito da formação inicial de professores dos primeiros anos. Estas tarefas devem conduzir à necessidade de generalizar, um processo central no raciocínio matemático, que se constitui ainda como uma fonte importante de conexões entre o raciocínio espacial e o pensamento algébrico. Ao generalizar, os futuros professores poderão seguir estratégias mais geométricas ou mais algébricas, de acordo com os seus próprios estilos de aprendizagem e pensamento e, paralelamente, usar representações de natureza mais visual ou mais simbólica. Contudo, o necessário confronto e discussão de resoluções favorece a atribuição de significado às ideias algébricas, o que vai ao encontro das necessidades já apontadas pela investigação.

Assim, a realização destas tarefas, numa dinâmica de ensino exploratório, favorece o surgimento de diferentes resoluções e abordagens, tirando partido da diversidade de experiências e conhecimentos dos estudantes. Além disso, a sua partilha e discussão pode promover o confronto de diferentes representações, valorizar a sua compreensão e favorecer a progressão para níveis mais formais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Atiyah, M. (1982). What is geometry? The 1982 Presidential Address. *The Mathematical Gazette, 66*(437), 179-184.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Brunheira, L. (2019). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial de professores dos primeiros anos.* (Dissertação de doutoramento não publicada, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa).

Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2018). Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Zetetiké vol 26(3),*464-485. doi:10.20396/zet.v26i3.8652882

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante vol. XVI (2),* 81-118.

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas – ligar o que foi desligado. *Educação e Matemática, 110,* 13-18.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 237-243.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education, 14*(2), 133-148.

Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS) (2000). *Mathematical Education of Teachers Project*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Conference Board for the Mathematical Sciences (CBMS) (2012). *Mathematical Education of Teachers II*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Guerreiro, H., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. Zetetiké, 26(2), 354-374. doi: 10.20396/zet.v26i2.8651281

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds*.), Proceedings of the 20th PME International Conference,* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Spain.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. (consultado em 17 de janeiro de 2020 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/da-textos/kaput_99algund.pdf

Lannin, J.K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática. Ensino Básico*.

Ministério de Educação — Direção Geral de Educação (ME — DGE) (2018). Aprendizagens Essenciais. Matemática. Consultado em http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Ministério da Educação — Direção Geral do Ensino Básico e Secundário (ME — DGEBS) (1991). Programa de Matemática. Ensino Básico. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). Princípios e *Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2014).

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Disponível em https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Ponte, J. P. (2010). Conexões no programa de matemática do ensino básico. *Educação e Matemática, 110,* 3-6.

Ponte, J. P. & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista, 50*, 135-155.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. ZDM Mathematics education, 48(5), 691-719.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245-268.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(4), 268-275.

Whiteley, W., Sinclair, N., & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3-14). New York, NY: Routledge.